

Fogalomtár Markov-lánchoz

Egy diszkrét idejű sztochasztikus folyamat az $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ valószínűségi változók közötti kapcsolat leírására szolgál.

- Egy diszkrét-idejű sztochasztikus folyamat **Markov-lánc** ha $t = 0, 1, 2, \dots$, és tetszőleges állapotok esetén

$$P(\mathbf{X}_{t+1} = i_{t+1} | \mathbf{X}_t = i_t, \mathbf{X}_{t-1} = i_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_1 = i_1, \mathbf{X}_0 = i_0) = P(\mathbf{X}_{t+1} = i_{t+1} | \mathbf{X}_t = i_t)$$

Ez a definíció azt jelenti, hogy a $t + 1$ időpontbeli állapot csak a t időpont állapotától függ, az azt megelőző időpontok állapotától nem.

- A p_{ij} értékek a Markov-lánc **átmeneti valószínűségei**, ha

$$P(\mathbf{X}_{t+1} = j | \mathbf{X}_t = i) = p_{ij}$$

Ennek következménye, hogy a valószínűségeloszlás, amely a következő időpontban felvett állapotot a jelenlegihez köti, időben változatlan, más szóval stacionárius. Ezért ezt a feltételt **stacionaritási feltételnek** szokás nevezni.

- Jelölje q_i annak a valószínűségét, hogy a 0 időpontban a lánc az i állapotban van. A $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_s]$ vektort a Markov-lánc **kezdeti valószínűségeloszlásának** nevezzük.
- Az átmenetvalószínűségek egy $s \times s$ típusú P **átmenetvalószínűség mátrixszal** vannak megadva.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

A P átmenetvalószínűség mátrix minden eleme nemnegatív, s minden sorban az elemek összege 1.

- A $P_{ij}(n)$ értékek a Markov-lánc **n-lépéses átmenetvalószínűségei**, ha

$$P(\mathbf{X}_{m+n} = j | \mathbf{X}_n = i) = P(\mathbf{X}_n = j | \mathbf{X}_0 = i) = P_{ij}(n)$$

- $P_{ij}(n) = P^n$ mátrix ij -edik eleme
- Az i és j állapotok rögzítése esetén Az i -ből a j -be vezető **úton** olyan átmenetek sorozatát értjük, amelyek az i -ből indulnak és a j -be érkeznek, és a köztes átmenetek során minden átmenetvalószínűség pozitív.

- A j állapotot az i állapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha megadható olyan út, amely az i -ből indul, és a j állapotba érkezik.
- Az i és j állapotok **kommunikálnak**, ha a j elérhető az i -ből, és az i is elérhető a j -ből.
- A Markov-lánc állapotainak S halmaza **zárt halmaz**, ha az S halmazon kívüli egyetlen állapot sem érhető el az S -ből.
- Az i **elnyelő állapot**, ha $p_{ii} = 1$
- Az i **tranziens állapot**, ha létezik olyan j állapot, amely elérhető az i -ből, de az i állapot nem érhető el a j -ből.
- Ha az állapot nem tranziens, akkor **visszatérő állapotnak** mondjuk.
- Az i állapot **periódikus** $k > 1$ periódussal, ha k az a legkisebb szám, hogy az i -ből kilépő lánc visszatérési idejének hossza a k egész számú többszöröse. A nem periódikus visszatérő állapotokat **aperiódikusnak** mondjuk.
- Ha az összes állapot visszatérő, aperiódikus, és az állapotok kommunikálnak egymással, akkor a láncot **ergodikusnak** mondjuk.
- **tétel:** Ha P az s állapotból álló ergodikus Markov-lánc átmenetváltó-színűség mátrixa, akkor létezik $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_s]$ vektor, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ p_{i1} & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ p_{i1} & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$$

- A $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_s]$ vektort a Markov-lánc **stacionér eloszlásának** vagy **egyensúlyi eloszlásának** nevezzük.
- $\pi_j = \sum_{k=1}^{k=s} \pi_k p_{kj}$ és $\sum_{i=1}^{i=s} \pi_i = 1$
- Egy ergodikus lánc esetén jelölje m_{ij} az i állapotból induló j állapotba érkező utakon a minimálisan szükséges lépések átlagos számát. Az m_{ij} értéket **átlagos első elérési időnek** nevezzük.
- $m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$ és $m_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$